EXPOSITIO BREVIS

Fundamentorum & modi, quo Cl. Dominus Vice-Colonellus Eugenius Corſonich uſus eſt in ſcripto Methodus Demonſtrativa ad inveſtigandam perfectam quadraturam circuli, unà cum refutatione ejuſdem ſcripti, quam dedit R. D. Joannes Koc Profeſſor Philoſophiæ in Collegio Regio Nobilium Varſavienſi Anno Domini 1776.

NOTUM eſt cuique, quod in Mathematicis dum res ad liquidum deducta fuerit, hoc eſt; verè demonſtrata, non ſit locus diſputationi, niſi quis evidentibus refragando velit impertinentia ſcribere ad faciendum imperitis aliquem fucum. Proinde unum ex iſtis neceſſariò debet eſſe, aut mea ſcripta non continent veras demonſtrationes contra Methodum Demoſtrativam, aut, ſi illæ veræ ſint, Auctor ejuſdem impertinentibûs ad rem argumentis & ſe & alios importunè occupat. Quidnam horum ſit, id totum hanc expoſitionem brevem legentium judicio committo.

§. 1. Fundamentum præcipuum Auctoris Methodi Demonſtrativæ eſt hæc propoſitio: *Peripheria circuli eſt tripla diametri cum minori quam* $\frac{1}{7}$, *& majori quam* $\frac{1}{9}$ *parte ejuſdem* [a] nam, inquit, omnes Geometræ hoc fatentur, quod adhibita ratione diametri ad peripheriam ut 7:22.

---

a. Cum demonſtratio veri nominis ſit deductio alicujus veritatis ex uno, vel pluribus principiis certis & evidentibus per conſecutiones pariter certas & evidentes, facile quiſque videt propoſitionem ab Auctore pro fundamento acceptam debere eſſe, aut per ſe certam & evidentem, aut talem reddi per rationes invictas, quibus innitebantur Geometræ, quorum auctoritas nudè citata eſt. Interim, ob rationes aliunde mihi notas, hic admittitur funda-

peccetur per excessum, jam verò ut 9: 28. per defectum. Hinc areas, circulorum investìgatas per rationem 1mam vocat excessivas, per 2dam defectivas. Hinc nata sunt apud ipsum segmenta excessiva & defectiva item circuli ac semi-circuli excessivi & defectivi, imò ex abundantia inanium operationum Arithmeticarum etiam lunulæ excessivæ & defectivæ *Vide Sch. 1. methodi demonstrativæ.* Jndè ulterius intulit, quod ratio vera diametri ad peripheriam debeat esse media inter duas modò citatas, hancque non aliam posse esse, quam 1: $3\frac{1}{8}$ = 8: 25.[b]En originem istius propositionis: *Peripheria est diametri tripla cum* $\frac{1}{8}$, quæ in se continet totum, quidquid Auctor feliciter inventum & credit & gaudet.

---

mentum Auctoris pro certo & indubitato. Non difficulter etiam quisque capere potest admissò principiò Auctoris, quod ratio 8: 25, quæ est media inter rationes 7: 22. & 9: 28, nam oritur ex additione antecedentium 7. † 9. = 16. & consequentium 22. † 28 = 50. utriusque memoratæ rationis, & diuisione per 2. $\frac{16}{2}$: $\frac{50}{2}$. = 8: 25. tum esset exactè illa, de qua est quæstio, si tantundem peccaretur excessu adhibendo 7: 22, quantùm erratur per defectum ponendo 9: 28. ad inveniendam peripheriam circuli, erroribûs enim contrariis mutuó se se elidentibûs remansisset ratio vera. Obtineretur etiam ratio vera diametri ad peripheriam per principium Auctoris, si aliquo modo resciviſſemus quantùm ex $\frac{2}{63}$, quæ sunt differentia inter $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$, subtrahendum sit ab $\frac{1}{7}$, vel addendum ad $\frac{1}{9}$, ut extingvatur quod in 1ma ratione superat, vel compensetur quod in altera deest. Hæ binæ reflexiones adeó displicuerunt Auctori, ut illas secum pugnantes appellaverit, meque de contradictione manifestè commissa accusarit. Vide n. 10. objectionum.

b. Primus error, quem Auctor commisit in suis deductionibus ex principio assumpto, & qui est origo aliorum, nam inter $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$ diametri non unica est fractio intermedia $\frac{1}{8}$, sed innumeræ aliæ, quarum multitudo crescit in ratione numeri partium, in quas differentia inter $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$ dividitur. *Dem:* Reductìs fractionibûs $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{9}$. ad eundem denominatorem $\frac{1}{7} = \frac{72}{504}$. $\frac{1}{8} = \frac{63}{504}$ $\frac{1}{9} = \frac{56}{504}$ & $\frac{72-56}{504} = \frac{16}{504}$. Ex hac differentia addendo successivè $\frac{1}{504}$. $\frac{2}{504}$. $\frac{3}{504}$ &c. ad $\frac{1}{9}$, vel subtrahendo ab $\frac{1}{7}$, obtinebuntur 15. fractiones intermediæ, inter quas habebit etiam locum $\frac{1}{8} = \frac{63}{504}$. Ergo inter $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$ non sola est fractio intermedia $\frac{1}{8} = \frac{63}{504}$, sed etiam $\frac{57}{504}$, $\frac{58}{504}$, $\frac{59}{504}$, $\frac{60}{504}$, $\frac{61}{504}$. &c. consequenter ratio vera diametri ad peripheriam potest esse *v.* 1: $3\frac{57}{504}$ *v.* 1: $3\frac{58}{504}$ *v.* 1: $3\frac{59}{504}$ *v.* 1: $3\frac{60}{504}$ *v.* 1: $3\frac{61}{504}$ &c. non autem 1: $3\frac{63}{504}$ = 1: $3\frac{1}{8}$ = 8: 25. Per omnes allatas rationes æque reperiuntur segmenta minora excessivîs & majora defectivîs, necnon lunulis suis & quadratis diametrorum proportionalia, ac per rationem 8: 25. cùm itaque Auctor in reliquis suis demonstrationibus pro quadratura circuli editis unicè intenderit reperire aream & segmenta circuli eadem, quæ obtinentur per rationem 8: 25. a se pro vera reputatam, evidens est easdem demonstrationes nihil aliud esse, quam continuationem & confirmationem erroris in 1ma deductione commissi. Clarius id pate-

§. 2. Quod autem ratio 8: 25. fit vera, adeoque illa, quæ requiratur ad habendam perfectam quadraturam circuli, hoc eſt; aream ſuam exactè & abſque ulla approximatione obtinendam, contendit Auctor id à ſe multis quidem demonſtrationibûs evictum, ſed vel maximè illâ, quam condidit adhibendo ſegmenta exceſſiva & defectiva, ac inter illa per ſeries fractionum ad ſuum intentum accommodatas, & conſultô inplicatiſſimas inveſtigando ſua, ut opinatur, vera, quæ ſiquidem tali operandi

---

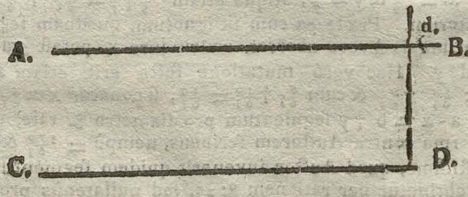
bit ex refutatione Theorematis, de quo Auctor 21. Maij 1776. in hæc verba ad me ſcripſit: *Curioſitatis gratia mitto tibi Theorema clariſſimum & rigoroſiſſime demonſtratum, quod nemo niſi ex Arcadia oriundus poteſt reſpuere*, eſt illud ſequens: ſegmenta ſunt ad lunulas ut 9: 16. *Dem*: Poſito ſegmento exceſſivo = a, & exceſſu ejus ſupra verum = x, erit ſegmentum verum a − x. Poſitô porró ſegmentò defectivò = b. & defectu ejus = y, erit idem ſegmentum verum = b. † y. Hinc a − x = b. † y. Aſſumpta itaque diametro = 8. deprehenditur a. ſegmentum exceſſivum = $\frac{64}{7}$, & b. ſeu defectivum = $\frac{80}{9}$, quæ reducta ad eundem denominatorem dant æquivalentia $\frac{576}{63}$ & $\frac{560}{63}$, quorum differentia, nempè a-b = $\frac{16}{63}$ manifeſtat ſummam quantitatum x & y. Etſi autem non detur 2da æquatio, nihilominùs tamen facilè venitur in cognitionem earum hoc modo: Ex reductione ſegmentorum a. & b. ad eandem denominationem, patet denominatorem 63. ortum eſſe ex fractionibus 7. & 9, ergo etiam fractiones x. & y. habent pro denominatoribus eoſdem factores (incipit erronea illatio, quæ ſervit ad intentum Auctoris) & quidem prior, quæ provenit ex ſegmento exceſſivo, quod componitur ex partibus 7mis, habet denominatorem 7. & poſterior 9. poſitîs autem denominatoribûs 7. & 9. numeratores nequeunt eſſe alii; niſi 1. nam $\frac{1}{7} \dagger \frac{1}{9} = \frac{9}{63} \dagger \frac{7}{63} = \frac{16}{63}$, ergo quantitas x. eſt hic = $\frac{1}{7}$ & y = $\frac{1}{9}$, eſt igitur a- x. = $\frac{64}{7} - \frac{1}{7} = \frac{63}{7}$ = 9. æquè ac b. † y = $\frac{80}{9} \dagger \frac{1}{9} = \frac{81}{9}$ = 9 ſegmentum verum, quod eſt ad lunulam ſuam 16. ut 9: 16. conſequenter ob ſimilitudinem omnia ſegmenta ſunt ad lunulas ſuas ut 9: 16. Hucuſque verba Auctoris pertinentia ad demonſtrationem ſui Theorematis. En verò refutationem meam. Demonſtratio allata evincit quidem per expreſſiones algebraicas erui unum ſegmentum æquale alteri, ſeu potius ſibi ipſi aliter repræſentato, at, quod illud ſit verum ne minimè quidem probat. Aſſertum meum ut pateat, ponat Auctor x. = $\frac{1}{9}$ & y = $\frac{1}{7}$, utique etiam $\frac{1}{9} \dagger \frac{1}{7} = \frac{7}{63} \dagger \frac{9}{63} = \frac{16}{63}$ differentiæ ſegmentorum. Præterea cum ſit ignotum, quodnam ſegmentum minùs, quod autem magis à vero aberret, eodem jure x. poteſt valere $\frac{1}{9}$ ac $\frac{1}{7}$, idem dicendum de y. Hac veró mutatione facta erit etiam a - x = b † y = $\frac{576}{63} - \frac{7}{63} = \frac{560}{63} \dagger \frac{9}{63}$ & cum $\frac{6}{63} \dagger \frac{10}{63} = \frac{16}{63}$, ſi ponatur x = $\frac{6}{63}$ & y = $\frac{10}{63}$, erit ex formula a - x = b. † y ſegmentum pro diametro 8. tale, quale reperi in argumento 1mo contra Auctorem ſcribens, nempè = $\frac{570}{63}$ &c. Ex hoc apparet manifeſtiſſimè, quod Auctor invenerit quidem ſegmentum pro diametro 8. idem ac obtinetur per rationem 8: 25, ſed nullatenùs probavit illud eſſe verum, quia in ſua demonſtratione per x. malè intellexit verum ſolùm exceſſum, & per y. verum tantum defectum tum, quando a - x = b † y, & quia

modo reperit eadem ac per rationem 8: 25, comparandoque illa cum lunulis correſpondentibus deprehendit eſſe ut 9: 16. proinde firmiſſimo aſſenſu retinet diametrum circuli habere ſe ad peripheriam ut 8: 25. & ſegmenta vera ad ſuas lunulas ut 9: 16.

§. 3. Segmenta vera cenſet Auctor, quæ hiſce proprietatibus gaudent: 1mo. Quod ſint majora defectivîs & minora exceſſivîs. 2do Quod ſuis lunulis necnon quadratis diametrorum proportionalia. 3tio Quod ſint numeri quadrati, licet hanc poſtremam notam non tam multùm curet, quam duas priores pro eſſentialibus ſegmentorum verorum reputatas. *Vide The. 2dum meth: demonſt: & ſub def. 4. demonſtrationem poſitam in appendice 2da & poſtre:* Poſtquam ipſi demonſtratum eſt, quod priores duæ notæ, quas ille ſolas ſufficere affirmabat ad

---

differentia $\frac{16}{63}$ = a - b = x † y non unicô modô dividi poteſt, quali ipſe uſus eſt, ſed multis aliis ita ſemper, ut & partes ſimul ſumptæ adæquent $\frac{16}{63}$, & ex illis una oblata à ſegmento exceſſivo, altera veró addita ad defectivum maneat æquatio ſuprà poſita. Pleniùs eadem res intelligitur modo ſequenti: Sit linea AB. = 6, 2 = a. exprimens ſegmentum exceſſivum, & CD. = 5, 8 = b. repræſentans ſegmentum defectivum. Deinde a. excedat lineam, quam aſſumpſi ad deſignandum ſegmentum verum quantitate x. & b. ab eadem deficiat per y. ita, ut a - x. ſit æquale b † y, erit utiq; a - b = x † y = 0, 4. = d. Ex hiſce datis, quæ ſunt præciſè eadem ac in æquatione Auctoris, concludatur, quæſo, demonſtrativè cujus magnitudinis aſſumpſerim lineam ad repræſentandum ſegmentum verum, & eo ipſo cognoſcetur qualisnam ſit demonſtratio ſua. Quid, ſi 4. decimas pedis, quod nihil vetat, convertiſſem in 40. centeſimas? &c. divinatione quidem opus eſſet majori quàm in 1mo caſu, at demonſtrationi in neutro locus eſſet. Præterire non poſſum in hoc loco, quod ſegmentum Auctoris pro diametro 8. per refutatum Theorema obtentum careat notâ ab ipſomet pro ſegmentis veris poſtremô requiſitâ, quæ qualiſnam ſit videbimus paulò ſuperiùs.



investiganda segmenta vera, conveniant etiam segmentis aliis (c) ex 3tia verò neque veritas, neque falsitas ipsius segmentorum legitimè pro-

---

e. Assumptis diametris 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. reperi segmenta $\frac{95}{672}$. $\frac{95}{168}$. $\frac{285}{224}$. $\frac{95}{42}$. $\frac{2375}{672}$. $\frac{855}{168}$. $\frac{4655}{672}$. $\frac{190}{21}$. $\frac{7695}{672}$. diversa ab iis, quæ Auctor invenit, & tamen sunt minora excessivis & majora defectivis, necnon lunulis suis & quadratis diametrorum proportionalia. Ad intelligendum planè, quod dico, sit Tabula suppeditans omnia, quæcunque in hoc loco sunt necessaria.

Diametri	Segmenta excessiva.	Segmenta à me reperta.	Segmenta Auctoris.	Segmenta defectiva.	Lunulæ
1.	$\frac{1}{7}$	$\frac{95}{672}$	$\frac{180}{1280}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{4}$
2.	$\frac{4}{7}$	$\frac{95}{168}$	$\frac{351}{624}$	$\frac{5}{9}$	1
3.	$\frac{9}{7}$	$\frac{285}{224}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{4}$
4.	$\frac{16}{7}$	$\frac{95}{42}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{80}{36}$	4
5.	$\frac{25}{7}$	$\frac{2375}{672}$	$\frac{225}{64}$	$\frac{125}{36}$	$\frac{25}{4}$
6.	$\frac{36}{7}$	$\frac{855}{168}$	$\frac{243}{48}$	$\frac{45}{9}$	9
7.	$\frac{49}{7}$	$\frac{4655}{672}$	$\frac{441}{64}$	$\frac{245}{36}$	$\frac{49}{4}$
8.	$\frac{64}{7}$	$\frac{190}{21}$	$\frac{576}{64}$	$\frac{80}{9}$	16
9.	$\frac{81}{7}$	$\frac{7695}{672}$	$\frac{729}{64}$	$\frac{405}{36}$	$\frac{81}{4}$

Ex hac Tabula si accipiantur segmenta à me reperta pro quibuscunque duabus diametris, & conferantur cum suis lunulis, patebit ipsa proportionalia esse iisdem e. g. sint segmenta pro diametris 2. & 3. erit 1. Lun: $\frac{95}{168}$. segm.

betur (d) addidit adhuc 4tam ſequentem proprietatem: *Segmenta verà debent habere denominatorem communem 64. qui poteſt eſſe etiam alius, dummodo ſit diviſibilis per 16. ſi diameter eſt numerus par, ſi hæc verò*

$= \frac{9}{4}$. Lun: $\frac{285}{224}$. ſegm: nam $1 \times \frac{285}{224} = \frac{285}{224}$. & $\frac{9}{4} \times \frac{95}{168} = \frac{855}{672} = \frac{285}{224}$ hoc eſt; facta extremorum æquantur factis mediorum. Jdem fiet ſi conferantur cum quadratis diametrorum. Eadem ſegmenta minora ſunt exceſſivîs, nam pro diametro 2. ſegmentum exceſſivum $= \frac{4}{7} = \frac{672}{1176}$. meum autem $\frac{95}{168} = \frac{665}{1176}$. Pro diametro 3. ſegmentum exceſſivum $\frac{9}{7} = \frac{2016}{1568}$ meum $= \frac{285}{224} = \frac{1995}{1568}$. & majora defectivis, nam pro diametro 2 ſegmentum defectivum $= \frac{8}{9} = \frac{840}{1512}$ meum $= \frac{95}{168} = \frac{855}{1512}$. Pro diametro 3 ſegmentum defectivum $= \frac{5}{4} = \frac{280}{224}$ meum $= \frac{285}{224}$. Jnde apparet quantum tribui debeat illis duobus problematis 1° *Ex ſegmento exceſſivo & defectivo invenire verum.* 2° *Ex ſegmento exceſſivo inveuire verum,* & eorum dumonſtrationibus, quarum utraque eſt circulus vitioſus. Vide n. 6. object: Jbidem cernes novum genus additionis fractionum diverſos denominatores habentium abſque ulla reductione.

d. Quod hæc nota conveniat ſegmentis veris conatus eſt Auctor oſtendere, ut ajunt, à priori per demonſtrationem datam in appendice 2da & poſtrema. Aſt poſtquam advertit errorem palpabilem ſuæ demonſtrationis, tum deinde faſſus eſt, quod per duas priores notas adhibitis ſeriebus reperta ſegmenta habeant etiam hanc proprietatem, *quod ſint numeri quadrati*, adeoque, quod in cognitionem dictæ proprietatis non priùs venerit, quam ſua ſegmenta repererit. Hinc quiſque videt ex hac nota neque veritatem, neque falſitatem legitimè probari. Unde ergo ſegmenta ſua conſtanter deprehenduntur numeri quadrati? *R.* Eſt hæc proprietas adhibitæ rationis diametri ad peripheriam ut $1 : 3\frac{1}{8}$, hac enim poſita quæcunque operationes Arithmeticæ adhibeantur ad inveſtiganda ſegmenta poſtremò reducuntur ad multiplicationem quadratorum perfectorum per quadrata perfecta, ut patet ex formula algebraica $\frac{h^2}{4} . (\frac{1}{2} p - 1)$ pro inveniendis ſegmentis ſerviente, atqui dum quadrata multiplicantur per quadrata facta naſcuntur numeri quadrati e. g. $4 \times 9. = 36.$ $36 \times 25 = 900.$ $100 \times 144 = 14400.$ Jtem $\frac{4}{9} \times \frac{16}{25} = \frac{64}{225}$. $\frac{49}{64} \times \frac{81}{100} = \frac{3969}{6400}$. &c. Ergo hæc proprietas eſt adhibitæ rationis diametri ad peripheriam ut $1 : 3\frac{1}{8}$ &c. Hinc ſi adhibueris rationem diametri ad peripheriam ut $1 : 3\frac{7}{18}$. ſemper obtinebis ſegmenta in numeris quadratis, nam pariter $\frac{1}{2} p - 1 = \frac{25}{36}$. fractioni, cujus tam numerator, quam denominator ſunt numeri quadrati, ac adhibita ratione ut $1 : 3\frac{1}{8}$. $(\frac{1}{2} p - 1) = \frac{9}{16}$. quæ multiplicari debet reapſe vel æquivalenter per $\frac{h^2}{4}$ ut obtineantur ſegmenta. Senſit Auctor vim refutationis hujus notæ, & ideo reſpondendo ad objectiones meas Nro 2do, non ampliùs eam commemorat, ſed novam prioribus 2abus adjungit. Præterea Nro. 13. adſcribit mihi errorem, qui eſt ſuæ imaginationis partus. Siccine ſuſtinetur, quod ſegmenta vera debeant eſſe numeri quadrati? nec aliter ſuſtineri potuerat.

est numerus impar, debet denominator esse divisibilis per 64. (e) Vide Object: n. 4. Jn eodem loco nullam ampliùs facit mentionem de nota 3tia (d) refutata.

§. 4. Hisce positis, existimavit Auctor sicut inter rationes 7:22. & 9:28. non aliam posse esse intermediam, quàm 8:25. hancque veram, ita inter segmenta excessiva & defectiva assumpta ad formandas series, non alia posse esse vera, quàm quæ per æqualitatem rationum, seu exponentium ex suis seriebus determinarentur, hoc est, quæ revera essent proportionalia suis lunulis. (f) Ad majorem claritatem meis

---

e. Postquam 4. vicibus ab Auctore postulaverim notam essentialem segmentorum verorum, per quam illa different à falsis, elapsis tandem 3bûs mensibus integris assignavit præter tres priores hanc 4tam, quod segmenta vera debeant habere denominatorem communem 64. &c. Nota hæc neque manifestat segmenta Auctoris vera esse, neque falsa, nam cognoscitur illis & quidem non omnibus inesse tum, quando per alias proprietates reperta sunt. Deindè potest ab illis abesse, ut revera abest à segmento 9. pro diametro 8, quod ipse Auctor per demonstrationem (: b :) refutatam invenit. Quid, quod nihil reposuerit ad hæc, quæ in se continet epistola mea 4ta, sunt autem sequentia: Quod segmenta tua per denominatorem 64. differant à falsis, & propter illum possint haberi certó pro veris, id nunquam ad tempus postremi scripti a te audivi, nec aliquando audiendum putavi. Quis istud vel angustissimîs ingenii limitibûs circumscriptus in animum unquam inducere potuit, quod denominator 64. tot modis in tuis segmentis manente eorum valore mutabilis constituat notam distinctivam eorundem à falsis? Hucusque apud omnes Philosophos certum & indubitatum fuit, quod notæ essentiales mutationem subire non possint salva rerum essentia, primus Cl. D. Corsonich oppositum habet pro vero: Nonne paulò post omnes denominatores, quos tua segmenta per multiplicationes & divisiones acquirere possunt, habebuntur pro notis eorum essentialibus? si ita est, nunquam in disputando perveniemus ad finem, semperque nugabimur. Considera attenta mente rem ipsam & demonstrationem tui Theorematis, deprehendes profectò commumunem denominatorem tuorum segmentorum fluere ex ratione diametri ad peripheriam $= 1:3\frac{1}{8}$, quam hucusque non demonstrasti esse veram. Adhibe ad investiganda segmenta aliam rationem, & habebis alium communem eorundem denominatorem, sic potes videre in Tabula apposita infra, quod segmenta reperta per rationem $1:3\frac{1}{7}$: habeant denominatorem communem 7. per rationem $1:3\frac{1}{9}$. possunt acquirere eandem 36. quid ergo ex hisce denominatoribus communibus pro veritate vel falsitate segmentorum inferes? nisi id, quod ex baculo in angulo stante pro statu cæli concludi potest, hoc est, verè nihil &c.

f. Tantùm Auctor fidit suis seriebus, ut reperta segmenta alia iisdem accuratè proprietatibûs prædita, quibûs gaudent sua, vide (: c :) ideo negavit esse vera, quia in quærendis illis non utebar prædictis seriebûs: *Proprietates*

dictis conciliandam, en Auctoris modum operandi in exemplis ab ipsomet ad me missis: Positâ diametrô = 6. habetur segmentum defectivum = $\frac{40}{8}$ & excessivum = $\frac{36}{7}$ utrumque falsum, proinde inter hæc duo segmenta tanquam limites necessariò reperiri debet verum, quippè quod debet esse majus defectivo & minus excessivo. Hinc denominator fra-

inquit, *segmentorum verorum possunt etiam servire falsis extra series, non verò intra illas*, ideoque coactus fueram similes series pro iisdem 9. exemplis, quibûs Auctor in suis scriptis usus est, formare & ostendere, quod mea segmenta non solùm extra series, quæ revera sunt ambages inutiles, sint majora defectivîs & minora excessivîs necnon lunulis suis proportionalia, sed etiam intra illas.

Diametri.	Segmenta excessiva.		Segmenta media.		Segmenta defectiva.
1 - - -	$\frac{864}{6048}$	—	$\frac{855}{6048}$	—	$\frac{840}{6048}$
2 - - -	$\frac{864}{1512}$	—	$\frac{855}{1512}$	—	$\frac{840}{1512}$
3 - - -	$\frac{288}{224}$	—	$\frac{285}{224}$	—	$\frac{280}{224}$
4 - - -	$\frac{864}{378}$	—	$\frac{855}{378}$	—	$\frac{840}{378}$
5 - - -	$\frac{21600}{6048}$	—	$\frac{21375}{6048}$	—	$\frac{21000}{6048}$
6 - - -	$\frac{7776}{1512}$	—	$\frac{7695}{1512}$	—	$\frac{7560}{1512}$
7 - - -	$\frac{42336}{6048}$	—	$\frac{41895}{6048}$	—	$\frac{41160}{6048}$
8 - - -	$\frac{1728}{189}$	—	$\frac{1710}{189}$	—	$\frac{1680}{189}$
9 - - -	$\frac{71784}{6048}$	—	$\frac{69255}{6048}$	—	$\frac{68040}{6048}$

Apposui hoc in loco non ipsas series, quæ sunt nimis longæ, sed segmenta excessiva & defectiva ita præparata, ut facili negotio in illas disponi possint, & segmenta media adnotata hoc quoque modo obtineri, quo Auctor

ctionis assumendus est in particulis minutissimis. Si ergo loco 8. assumatur 48. habebitur fractio $\frac{240}{48}$ æquivalens segmento defectivo $\frac{40}{8}$, quoniam fractio $\frac{240}{48}$ est justo minor addenda est ei successivè $\frac{1}{48}$, hoc modo eruuntur fractiones crescentes $\frac{241.\ 242.\ 243.\ 244.\ 245.\ 246.}{48}$

fractio $\frac{247}{48}$ nequit jam collocari in eadem serie, siquidem est major segmento excessivo $\frac{36}{7}$. simili artificio usus est pro formanda 2da serie adhibita diametro 2. & invento segmento defectivo = $\frac{5}{9}$, excessivo = $\frac{4}{7}$. positoque denominatore fractionum = 624. reperit eam = $\frac{348.\ 349.\ 350.\ 351.\ 352.\ 353.\ 354.\ 355.\ 356.\ 357.}{624}$ Pergit ulterius: conferatur igitur lunula 9. cum singulis numeris 1mæ seriei, & habebuntur rationes 9: $\frac{241:\ 242:\ 243:\ 244:\ 245:\ 246:}{48}$ conferatur quoque lunula 1: $\frac{348:\ 349:\ 350:\ 351:\ 352:\ 353:\ 354:\ 355:\ 356:\ 357.}{624}$ tollendo fractiones 2dæ seriei oriuntur rationes prioribus æquales 624: 348: 349: 350: 351: 352: 353: 354: 355: 356: 357. minuantur hæ rationes, quod fit dividendo membra cujusque rationis per 39, hoc pacto oriuntur rationes prioribus æqnales, sed ad minores terminos redactæ 16: $8\frac{35}{39}$: $8\frac{36}{39}$: $8\frac{37}{39}$: $8\frac{38}{39}$: 9: $9\frac{1}{39}$: $9\frac{2}{39}$: 9. $9\frac{3}{39}$: $9\frac{4}{39}$: $9\frac{5}{39}$. Eodem modo tollantur fractiones seriei 1mæ, & habebuntur rationes prioribus æquales 432: 241: 242: 243: 244: 245: 246: minuantur hæ rationes, ita oriuntur novæ prioribus æquales 16: $8\frac{25}{27}$: $8\frac{26}{27}$: 9: $9\frac{1}{27}$: $9\frac{2}{27}$: $9\frac{3}{27}$. Conferendo tandem rationes has cum rationibus seriei 2dæ deprehenduntur omnes inter se inæquales [g] exceptis 9: $\frac{243}{48}$. = 432: 243 = 16: 9. seriei 1mæ & 1: $\frac{351}{624}$. = 624: 351 = 16: 9. seriei 2dæ. Ergo $\frac{243}{48}$. = $5\frac{1}{16}$. & $\frac{351}{624}$, = $\frac{9}{16}$ sunt segmenta vera.

§. 5. Ex modo operandi, quo Auctor usus est, & principio assumpto patet, quod segmenta ab ipso reputata pro veris, etsi gaudeant

obtinuit sua, hoc est, per series. Segmenta media adnotata sunt revera illa, quæ continentur in Tabula infra posita, sed sub alia forma, nam $\frac{864}{6048} = \frac{95}{672}$ segmento pro diametro 1. à me reperto, & $\frac{864}{1512} = \frac{95}{168}$ segmento pro diametro 2. &c. Hinc dubitari non potest, quod sint proportionalia suis lunulis æquè, ac majora defectivis & minora excessivis.

g. Legendo miras conditiones, easque in diversis locis diversas pro efficiendis denominatoribus fractionum, ex quibus Auctor formabat suas series, non difficulter intelligi potest, quod in hujusmodi seriebus non ex natura rei, sed ex certa dispositione & modo operandi unus tantùm terminus reperiatur habens eandem rationem ad lunulam suam in 1ma serie, quam habet alter in altera.

3bus proprietatibus in Methodo Demonſtrativa expreſſis, imó & quarta poſtea addita non deſtituantur, tamen in inveſtigandis illis non potuit ad alias attendere, quàm ad duas, quas, ut ajunt, à priori demonſtravit debere convenire ſegmentis veris, nempè: quod ea debeant eſſe majora defectivis & minora exceſſivis, necnon lunulis ſuis & quadratis diametrorum proportionalia, &, ſi etiam demonſtraſſet, quod eædem notæ non conveniant falſis, rem totam abſolviſſet egregie, quia in hoc caſu eſſet definitio ſegmentorum verorum talis, per quam illa & in ſe cognoſcerentur & ab aliis ſecernerentur, nec obiiceretur ipſi repetitîs vicibûs illud: Aſſigna, ſi potes notam eſſentialem ſegmentorum verorum, per quam illa differunt à falſis.

§. 6. Silentiô præterire non poſſum Theorema 3tium Methodi Demonſtrativæ: *Area circuli eſt media Arithmetice proportionalis inter quadratum diametri & internum.* Perpendenti demonſtrationem hujus Theorematis patebit illud eſſe revera continuationem erroris in 1ma deductione commiſſi [: b :) nam involvit in ſe hanc proportionem: Latus quadrati interni ita ſe debet habere ad diametrum circuli, ut 3: 4. jam verò hæc proportio non ad aliquid aliud ſervit, quàm ad inveniendam eandem aream circuli per modum operandi Auctoris, quæ reperitur per rationem 8: 25. ab ipſo pro vera non demonſtratam, ſed reputatam. Si quis eodem modo operandi velit reperire aream circuli majorem, tum latus quadrati interni creſcet, ſi verò minorem, decreſcet (: h :] En manifeſtam cauſam, propter quam Auctor nunquam voluit dare rationem, etſi aliquoties rogatus, cur hæc proportio intraret in ſuam demonſtrationem.

Formavi in meis ſcriptis multas tales ſeries ad convincendum Auctorem, in quibus omnes termini unius ſeriei collati ſucceſſivè cum ſuis lunulis eandem habeant rationem ad eas, ac alterius ſumpti eodem ordine & comparati ſimiliter. Feci hoc non propterea, quod eſſet neceſſarium ad veram refutationem, ſed quod credebam ab homine ſincerè veritatem quæri & velle illuminari, qui ſe veritatis amatorem verbis ſemper profitebatur.

h. Si area circuli per quamcunque rationem inventa ſit $=$ a, quadratum diametri $= d^2$ quadratum internnm $= q^2$ erit juxta mentem Auctoris latus quadrati interni $q = \sqrt{2a - d^2}$. Poſita nunc ratione diametri ad peripheriam ut 1: $3\frac{7}{18}$ obtinetur per formulam dictam latus quadrati interni ad diametrum ut 5: 6. ſemperque habebitur eadem area circuli addendo quadratum diametri ad quadratum internum & ſummam dividendo per 2. quæ invenitur

§. 7. Poſtremò, idem deſiderium meum nunc eſt, ac fuit ab initio. Utinam aliquis bonus Genius ſuggerat Auctori modum ita dividendi $\frac{2}{63}$, quæ ſunt differentia inter $\frac{1}{7}$. & $\frac{1}{9}$, ut ſciat quantùm ab $\frac{1}{7}$. ſubtrahendum, vel ad $\frac{1}{9}$. addendum ſit pro invenienda ratione vera diametri ad peripheriam, aut reperiendi per ſeries fractionum, vel æquationem aliquam non erroneè diſpoſitam, quantùm ex illa differentia, quæ habetur inter ſegmentum exceſſivum & defectivum, vel ſubtrahendum ſit à quantitate juſtò majori, vel addendum minori, ut evadat vera, in quo cardo rei vertitur, & ita ſuggerat, ut non ſolum hoc ipſe noſcat certò, ſed etiam nos poſſit ducere in cognitionem veritatis tot ſæculîs deſideratæ per demonſtrationem ſaltim unam non tantùm principia certa & evidentia continentem, ſed etiam conſecutionibûs pariter certîs & evidentibûs non deſtitutam.

---

per rationem 1 : $3\frac{7}{18}$, adeoque erit media Arithmeticè proportionalis, nec tamen vera: Hæc itaque formula Auctoris $x = \frac{a^2 + b^2}{2}$ nihil ampliùs evincit, quam quod area circuli x. æqualis ſit $\frac{1}{2}$. quadrati diametri cum $\frac{1}{2}$. quadrati interni exactè, ſi $\frac{1}{2}$. quadrati interni tam perfectè æqualis ſit utrique ſegmento, ſicut $\frac{1}{2}$ quadrati diametri adæquat utramque lunulam.

Ad M. D. Gloriam.